Décomposition de Bruhat

Leçon : 101, 105, 106, 162, (157)
↳ faire alors le lien entre u trigonalisable ⟺ u stabilise un drapeau.

Ref : L'oral à l'agrégation de ..., L. Isenmann et T. Pecatte
ou
XENS algèbre 1

<u>But</u> : écrire une matrice inversible comme le produit à gauche et à droite d'une matrice de permutation par deux matrices triangulaires supérieures.

<u>Notation</u> - $E = \mathbb{K}^n$
- T_S le sg de $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures.

Rappels (ne pas faire au tableau, le mettre dans le plan, sauf peut-ê pour la prop).

Définition 1
Un drapeau complet est une suite strict. croissante d'ev. $(A_0, \dots, A_n)$:
$$\{0\} = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n = E.$$
$\mathcal{D} := \{\text{drapeaux complet de } E\}$.

Lien bases ⟷ drapeaux :
→ si $(f_1, \dots, f_n)$ base de E, si on note $F_i = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$, avec
$$d = (F_0, \dots, F_n) \in \mathcal{D}.$$
← si $d = (F_0, \dots, F_n) \in \mathcal{D}$, le TBI nous permet de trouver une base $(f_1, \dots, f_n)$ de E tq $F_i = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$.

⇒ C'est une base <u>adaptée</u> au drapeau d

Ainsi si on considère $GL_n(\mathbb{K})$ comme l'ens. des bases de E, l'application
$$\varphi : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{D}$$
$$A = (C_1 | \cdots | C_n) \mapsto (\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_k))_{0 \leq k \leq n}$$
est surjective.
Si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique, on note $\delta = \varphi(e)$ la drap. can. de E.

On fait agir $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D}$ via

$$P.d = P.(F_0, \ldots, F_n) := (P(F_0), \ldots, P(F_n)) \in \mathcal{D}.$$

Proposition 2

Cette action est transitive, et $\mathcal{D}$ est en bijection avec $GL_n(\mathbb{K})/T_S$.

__Preuve__

Soit $d = (F_0, \ldots, F_n)$ un drapeau. Soit alors $P \in GL_n(\mathbb{K})$ l'unique matrice vérifiant $P(e_i) = f_i$, où f_i est une base adaptée à d.

Ainsi $P.\delta = d$, l'action est transitive !

Ainsi $\underset{(\text{orbite})}{\mathcal{D}} \sim \dfrac{GL_n(\mathbb{K})}{\mathrm{Stab}_{GL_n(\mathbb{K})}(\delta)}$, et $\mathrm{Stab}_{GL_n(\mathbb{K})}(\delta) = T_S$.

$\square$

→ fin des rappels

Théorème 3 (Bruhat)

On a $GL_n(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_S P_\sigma T_S$.

__Preuve__

→ on va trouver algorithme qui à $A \in GL_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow P_\sigma$, en se limitant à des opérations dans T_S. (Même idée que pivot de Gauss).

- Opérations élémentaires

*On note, pour $T_{i,j}(\lambda) := Id + \lambda E_{ij}$, $i < j$, $T_{i,j}(\lambda) \in T_S$.

$T_{i,j}(\lambda) \times \cdots \quad : L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

$\cdots \times T_{i,j}(\lambda) : C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

matrices de transvection.

* Matrices de dilatation : $D_i(\alpha) := Id + (\alpha - 1) E_{ii}$

$D_i(\alpha) \times \cdots \ : L_i \leftarrow \alpha L_i$

$\cdots \times D_i(\alpha) : C_i \leftarrow \alpha C_i$

- Existence

La $1^{ère}$ colonne de A est $\neq 0$ car $A \in GL_n(\mathbb{K})$, soit donc i_1 le plus grand indice k tq $a_{k,1} \neq 0$. En multipliant à gauche par des T_{k,i_1}, $k < i_1$, on annule les autres coeff. de C_1.

On multiplie à droite par $D_1(1/a_{k,1})$, on normalise

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \\ 1 & * \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \leftarrow i_1$$

On multiplie à droite par des $T_{1,k}$ pour annuler la L_{i_1} $i^{ème}$ ligne.
$(k>1)$

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & * & \\ \vdots & & \\ 1 & \boxed{0} \cdots & 0 \\ 0 & * & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \overset{déf}{=} A_1 \in GL_n(\mathbb{K}).$$

Soit i_2 le + grand indice k tq $a_{k,2} \neq 0$.

On a $i_1 \neq i_2$ car $\boxed{a_{i_1,2} = 0.}$ On répète le procédé pour annuler les autres coeffs de C_2 et de L_{i_2} : ça ne change ni C_1 ni L_{i_1}.

On construit ainsi $i_1, i_2, \dots, i_n$, et on note $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ la permutation définie par $\sigma(k) = i_k$. $A_n \rightsquigarrow P_\sigma$.

On a multiplié (à gauche et à droite) uniquement avec des matrices de T_s. On a l'existence!

- Unicité

On suppose que $A = T_1 P_\sigma T_2 = T_1' P_{\sigma'} T_2'$, avec $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ et $T_1, T_1', T_2, T_2' \in T_s$.

On pose $B_1 = T_1'^{-1} T_1$ et $B_2 = T_2' T_2^{-1}$. $\in T_s$.

Alors on a $B_1 P_\sigma = P_{\sigma'} B_2$

Alors la colonne j de $B_1 P_\sigma$ est la colonne $\sigma(j)$ de B_1.

Or $B_1 \in T_s$ donc les coeffs en position (i,j) sont nuls pour $i > \sigma(j)$. De même, $(P_{\sigma'} B_2)_{\sigma'(j),j} = {B_2}_{j,j} \neq 0$ car $B_2 \in GL_n(\mathbb{K})$. $\in T_s$

Donc $\forall j \; \sigma'(j) \leq \sigma(j) \Rightarrow \sigma' = \sigma$

□

Théorème 4 Le nombre d'orbites de l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ est $n!$

Preuve

à l'aide la bijection de la proposition 2, on identifie un drapeau d avec un élément $\overline{B} \in GL_n(\mathbb{K})/T_s$.

Soit $(X,Y) \in GL_n(\mathbb{K})$, on écrit $(\overline{X},\overline{Y}) = X(\overline{Id}, \overline{X^{-1}Y})$.

On décompose $X^{-1}Y$ en $T_1 P_\sigma T_2$, $T_1, T_2 \in T_s$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

On obtient : $(\overline{X},\overline{Y}) = X T_1 (\overline{Id}, \overline{P_\sigma})$ $\left((\overline{I_n}, \overline{X^{-1}Y}) = T_1(\overline{T_1^{-1}}, \overline{P_\sigma T_2})\right)$

Donc toute orbite contient un élément de la forme $(\overline{Id}, \overline{P_\sigma})$.

De plus, σ est unique pour une orbite, car si il existe $A \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $(\overline{Id}, \overline{P_\sigma}) = A(\overline{Id}, \overline{P_\tau})$ pour une permutation τ, alors

- $A \in T_s$
- il existe $T \in T_s$ tq $AP_\tau = P_\sigma T$ $\to$ impossible sauf si $\sigma = \tau$, par unicité de la décomposition.

Ainsi, il y a autant d'orbites que de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$: $n!$ □